Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1.

Première partie. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de E, on note $V(\lambda) = \text{Ker } (f - \lambda \text{Id}_E)$ le sous-espace propre associé à λ.

(1) Soient λ_1, λ_2 deux valeurs propres différentes de f. Montrer que $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0\}$.

(2) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres toutes différentes de f. Montrer que les sous-espaces vectoriels $V(\lambda_1), V(\lambda_2), \dots, V(\lambda_k)$ sont en somme directe.

(3) En déduire que f ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres.

Deuxième partie. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB^2 - B^2A = B$.

(4) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $kB^{2k-1} = AB^{2k} - B^{2k}A$.

(5) Soit f l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = ABM - MBA$. Si $B^{2k-1} \neq 0$, montrer que B^{2k-1} est un vecteur propre de f et donner la valeur propre associée.

(6) Montrer qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $B^m = 0$, et que le plus petit entier vérifiant cette égalité est impair.

Exercice 2.

(1) Énoncer le théorème des accroissements finis.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Dans la suite, on fixe $c > 0$ et on considère une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|^c$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que g est continue.

(4) Montrer que si $c > 1$, alors g est constante.

(5) Est-ce que g est nécessairement dérivable ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ la fonction définie par $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) Quel est le degré de $f(X^p)$, où $p \geq 0$ est un entier ?

(3) Trouver le noyau de f, le rang de f et donner une base de l'image de f.

Exercice 2. Afin de garantir l'anonymat (et la sincérité des réponses) dans un sondage sur la consommation de stupéfiants, on choisit d'y introduire une dose de hasard. On choisit le protocole suivant, chaque individu sondé s'isole avec un dé (à six faces équiprobables) et jette le dé.

— S'il obtient un résultat inférieur à 4 il doit répondre sincèrement à la question : "Avez vous consommé des stupéfiants lors de l'année écoulée ?".

— S'il obtient un 5 ou un 6 au dé : il doit répondre (toujours sincèrement) à la question : "Avez vous obtenu un 6 ?".

Les sondeurs disposent uniquement de la réponse finale (Oui ou Non) mais ne savent pas à quelle question le sondé a répondu. On suppose qu'une proportion p de la population a consommé des stupéfiants et que les sondés sont choisis au hasard de manière indépendante.

(1) Donner la probabilité qu'un sondé réponde Oui à la question.

(2) Sachant qu'un individu répond Oui, quelle est la probabilité qu'il ait consommé des stupéfiants.

(3) Supposons maintenant qu'on ait interrogé n sondés et notons Z_n la proportion du nombre de Oui. Donner un estimateur pour p, donner son espérance et sa variance.

(4) Après avoir interrogé 1000 personnes, on obtient 37 pour-cents de Oui. Que pouvez-vous conclure ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soient $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(S'_n)_{n\geq 1}$ les deux suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \qquad S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \ .$$

(1) Montrer que, pour tout entier $p \geq 2$,

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x} \ .$$

(2) Montrer que la suite (S_n) converge et calculer sa limite.

(3) Montrer que $S_n = S'_{2n}$ pour tout entier $n \geq 1$, et en déduire la limite de (S'_n) lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier et $p \in (0,1)$. On considère une pièce $\mathcal{P}_1$ qui, après avoir été lancée, atterrit sur pile avec probabilité p et sur face avec probabilité $1-p$. Soit $1 \leq k \leq n-1$ un entier.

(1) Quelle est la probabilité que la pièce atterrisse k fois sur pile (et donc $n-k$ fois sur face) après avoir après avoir fait n lancers (indépendants) ?

(2) On lance maintenant la pièce jusqu'à ce qu'elle ait atterri k fois sur pile. Quelle est la probabilité qu'on ait dû le faire exactement n fois ?

(3) Soient $B_1, \ldots, B_m$ des événements de probabilité non nulle, deux à deux disjoints, et telle que leur union soit égale à l'univers. Montrer que tout événement A de probabilité non nulle vérifie

$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq m, \qquad \mathbb{P}\left(B_i \middle| A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A \middle| B_i\right) \mathbb{P}\left(B_i\right)}{\sum_{1\leq j\leq m} \mathbb{P}\left(A \middle| B_j\right) \mathbb{P}\left(B_j\right)}.$$

On considère maintenant une nouvelle pièce $\mathcal{P}_2$ qui atterrit sur pile avec probabilité $1/2$ et sur face avec probabilité $1/2$. On choisit au hasard soit la première pièce $\mathcal{P}_1$ soit la nouvelle pièce $\mathcal{P}_2$ (avec égales probabilités).

(4) On lance la pièce choisie n fois. Sachant que la pièce a atterri k fois sur pile, quelle est la probabilité que la pièce choisie soit la première pièce ?

(5) On lance la pièce choisie jusqu'à ce qu'elle ait atterri k fois sur pile. Sachant qu'on a dû effectuer n lancers pour cela, quelle est la probabilité que la pièce choisie soit la première pièce ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soient $a > 0$ et $\beta > 1$. On considère une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ qui peut s'écrire comme suit au voisinage de 0 :

$$f(x) = x - ax^\beta + o_{x\to 0}(x^\beta).$$

On fixe $u_0 \in [0,1]$, et on considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

(1) Que vaut $f(0)$? Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) < x$ sur $]0,\eta]$. En déduire que si u_0 est suffisamment petit, (u_n) converge vers 0.

Dans la suite, on suppose que $u_n \to 0$.

(2) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Donner un équivalent de $f(x)^\gamma - x^\gamma$ lorsque $x \to 0$. En déduire une valeur de γ pour laquelle la suite $u_{n+1}^\gamma - u_n^\gamma$ converge vers un nombre réel strictement positif.

(3) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels tels que $v_{n+1} - v_n \to \ell$ lorsque $n \to \infty$, où $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $v_n/n \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

(4) En déduire un équivalent de u_n.

(5) Traiter les exemples de $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \ln(1+x)$.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n.

(1) Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes telle que, pour tout $n \geq 0$, on a $P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, $P_n(0) = 0$ et $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$.

(2) Montrer que cette suite est unique.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Chaque nuit, le prince choisit au hasard de dormir sur $6, 7$ ou bien 8 matelas (avec des probabilités égales). Chaque nuit, indépendamment, la princesse place sous les matelas un petit pois avec probabilité $1/2$. Par ailleurs :

- si le prince dort sur 6 matelas et qu'un petit pois se trouve en-dessous, celui-ci dort mal ;
- si le prince dort sur 7 matelas et qu'un petit pois se trouve en-dessous, celui-ci dort bien avec probabilité $1/5$ (sinon il dort mal) ;
- si le prince dort sur 8 matelas et qu'un petit pois se trouve en-dessous, celui-ci dort bien avec probabilité $2/5$ (sinon il dort mal).

(s'il n'y a pas de petit pois, le prince dort toujours bien).

(1) Soient $B_1, \ldots, B_n$ des événements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints, et telle que leur union soit égale à l'univers. Montrer que tout événement A vérifie

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A \middle| B_i\right) \mathbb{P}(B_i).$$

(2) Quelle est la probabilité que le prince annonce avoir bien dormi au réveil ?

(3) Si A et B sont deux événements de probabilité non nulles, montrer que

$$\mathbb{P}\left(A \middle| B\right) = \mathbb{P}\left(B \middle| A\right) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

(4) Sachant que le prince a bien dormi, quelle est la probabilité qu'il ait dormi sur 7 matelas ?

(5) Le matin du 17 juin, le prince annonce avoir bien dormi. Sur combien de matelas a-t-il dormi, en moyenne ?

Exercice 2. Soient $d \geq 1$ un entier et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de fonctions continues $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de dimension d. Si $a \in [0, 1]$, on note $H_a = \{f \in E; f(a) = 0\}$, et si $g \in E$ on note $G_g = \{\lambda g; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(1) Soit $g \in E$. On suppose que g n'est pas la fonction nulle, et on considère un réel $a \in [0, 1]$ tel que $g(a) \neq 0$. Montrer que $E = G_g \oplus H_a$.

(2) Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_d \in [0, 1]$ et des fonctions $g_1, \ldots, g_d \in E$ tels que

$$E = G_{g_1} \oplus G_{g_2} \oplus \cdots \oplus G_{g_d} \qquad \text{et} \qquad \text{pour tous } 1 \leq i, j \leq d, \quad g_i(a_j) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad i = j.$$

En déduire que pour tout $f \in E$,

$$\forall i = 1, \ldots, d, \ f(a_i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \ .$$

(3) Démontrer que, si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ est une base de E, la matrice $\Phi = (\Phi_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$, où $\Phi_{i,j} = \varphi_j(a_i)$, est inversible.

(4) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions de E telle que $\forall x \in [0, 1]$, $f_n(x) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $f \in E$ et que $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1.

(1) Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$\ln x \le x - 1 \ .$$

(2) Soient $(p_1, \ldots, p_n)$ et $(q_1, \ldots, q_n)$ des réels strictement positifs tels que
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1 \ .$$

Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) \le \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) \ .$$

(3) Résoudre le système suivant, d'inconnues $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ e^a + e^b + e^c = 3 \end{cases} .$$

Exercice 2. On fixe un entier $n \ge 1$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes qui admettent toutes une variance. On suppose que $\mathbb{E}[X_i] = 0$ pour tout $1 \le i \le n$ (mais on ne suppose pas que ces variables ont même loi). On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ (avec la convention $S_0 = 0$). Le but de l'exercice est de montrer que
$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge t\right) \le \frac{1}{t^2} \sum_{1\le i\le n} \mathrm{Var}(X_i).$$
On pourra utiliser le fait que pour toute variable aléatoire positive Y admettant une espérance, on a $\mathbb{P}(Y \ge t) \le \frac{1}{t}\mathbb{E}[Y]$ pour tout $t > 0$.

(1) Pour $1 \le k \le n$, calculer $\mathbb{E}[S_n - S_k]$.

(2) Exprimer $\mathrm{Var}(S_n)$ en fonction de $\mathrm{Var}(X_1), \ldots, \mathrm{Var}(X_n)$.

(3) Soit A l'événement $A = \{\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge t\}$. Pour $1 \le k \le n$, on introduit l'événement
$$A_k = \bigcap_{1\le j<k} \{|S_j| < t\} \cap \{|S_k| \ge t\}.$$

Montrer que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints et que $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

(4) Montrer que $\mathbb{E}\left[S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}\right] \ge t^2 \mathbb{P}(A_k)$, où $\mathbb{1}_{A_k}$ est la variable aléatoire qui vaut 1 si A_k est réalisé et 0 sinon.

(5) Montrer que $\mathbb{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$ et en déduire que $\mathbb{E}\left[S_n^2\right] \ge \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}\right]$.

(6) Montrer que
$$\mathbb{E}\left[S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}\right] \ge \mathbb{E}\left[S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}\right] + 2\mathbb{E}[S_n - S_k]\, \mathbb{E}[S_k \mathbb{1}_{A_k}] \, .$$

Indication. On pourra écrire $S_n^2 = (S_k + (S_n - S_k))^2$.

(7) En déduire que $\mathbb{E}\left[S_n^2\right] \ge t^2 \mathbb{P}(A)$ et conclure.

(8) *Application :* majorer $\mathbb{P}(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge t)$ lorsque X_i suit une loi uniforme sur le segment $[-\sqrt{i}, \sqrt{i}]$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. On définit par récurrence une suite $(P_n(X); n \geq 0)$ de polynômes comme suit :

$$\begin{aligned} P_0(X) &= 1, \\ P_1(X) &= X, \\ P_{n+2}(X) &= 2XP_{n+1}(X) - P_n(X) \qquad \text{pour } n \geq 0. \end{aligned}$$

(1) Calculer P_n pour $n = 2, 3, 4, 5$.

(2) Montrer que pour tout $n \geq 0$, les coefficients de P_n sont des nombres entiers.

(3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ en fonction de $\cos(a), \cos(b), \sin(a)$ et $\sin(b)$.
Indication. On pourra utiliser la formule d'Euler exprimant e^{ix} en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

(4) Pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos((n + 2)x)$ en fonction de $\cos((n + 1)x)$, $\cos(nx)$ et $\cos(x)$.

(5) Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$P_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

(6) Donner les racines de P_n.

(7) Écrire P_n sous forme factorisée.

Exercice 2. On considère un jeu à n joueurs ($n \geq 2$). Chaque joueur rencontre une fois chacun des autres participants. L'issue de chacune de ces confrontations est la victoire d'un des joueurs.

(1) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 4$.
  (a) Combien y aura-t-il de rencontres disputées en tout ?
  (b) Montrer qu'on peut décomposer l'ensemble des rencontres en 3 groupes dans lesquels chaque joueur joue exactement une fois.

On revient maintenant au cas général où il y a n joueurs. On suppose que $n = 2k$ est pair.

(2) Combien y aura-t-il de rencontres disputées en tout ?

(3) Montrer qu'il existe toujours au moins un joueur ayant remporté au moins k rencontres.

(4) On souhaite décomposer l'ensemble des rencontres en groupes dans lesquels chaque joueur joue exactement une fois. Combien faut-il faire de groupes ?

(5) Montrer qu'on peut décomposer l'ensemble des rencontres en groupes dans lesquels chaque joueur joue exactement une fois.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$f \circ f - 3f + 2I = 0 \ ,$$

où I désigne l'application identité.

(1) Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

(2) Montrer que Ker $(f - I)$ et Ker $(f - 2I)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.
Indication. On pourra écrire $I = (f - I) - (f - 2I)$.

(3) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels tels que $u_{m+n} \leq u_m + u_n$ pour tous entiers $m, n \geq 1$. On pose

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \min_{1\leq k\leq n} \frac{u_k}{k}.$$

(1) Montrer que $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et que ℓ est bien défini.

(2) Montrer que $u_{mn} \leq m u_n$ pour tous entiers $m, n \geq 1$.

(3) On suppose dans cette question que $\ell \in \mathbb{R}$ et on fixe $\epsilon > 0$.

   (a) Justifier qu'on peut trouver un entier $m \geq 1$ tel que $\frac{u_m}{m} \leq \ell + \epsilon$.

   (b) Montrer que $\frac{u_n}{n} \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.
   Indication. On pourra effectuer la division euclidienne de n par m.

(4) Un *chemin* auto-évitant de longueur n est par définition une suite $X_0, X_1, \ldots, X_n$ de points à coordonnées entières du plan tels que X_0 est l'origine, la distance entre X_i et X_{i+1} vaut 1 pour tout $0 \leq i \leq n-1$, et tels que $X_i \neq X_j$ dès que $i \neq j$. Soit c_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n. Montrer que $c_n^{1/n}$ converge lorsque $n \to \infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f : E \to F$ une application linéaire non nulle.

(1) Soient G et H deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $f(G + H) = f(G) + f(H)$.

(2) Pour tout $A \subset F$, on note
$$f^{-1}(A) = \{ x \in E \text{ tels que } f(x) \in A \} \quad .$$
Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de F.
  (a) Montrer que $f^{-1}(A) + f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A + B)$.
  (b) Montrer que cette inclusion peut être stricte.

(3) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
  (a) f est injective,
  (b) l'image par f de toute famille libre est une famille libre.

(4) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
  (a) f est injective,
  (b) pour toute décomposition $E = G \oplus H$, on a $f(E) = f(G) \oplus f(H)$.

Exercice 2. Soient $n \geq 1$ et $\theta > 0$. On considère des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes qui sont distribuées uniformément sur le segment $[0, \theta]$. On pose
$$T = 2 \cdot \frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_n}{n}, \qquad S = \frac{n+1}{n} \cdot \max(U_1, \ldots, U_n).$$

(1) Montrer que T est un estimateur sans biais de θ. Quelle est sa variance ?

(2) Montrer que S est un estimateur sans biais de θ. Quelle est sa variance ?

(3) Comparer ces deux estimateurs.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g des endomorphismes de E. On considère un supplémentaire H de Ker (f) dans E. Soit $h : H \to E$ l'application qui, à tout $x \in H$ associe $g \circ f(x)$.

(1) Montrer que
$$\mathrm{Ker}\ (g \circ f) = \mathrm{Ker}\ (h) + \mathrm{Ker}\ (f)\ \ .$$

(2) Montrer que $\mathrm{rg(h)} + \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{(h)} = \mathrm{rg(f)}$. En déduire que
$$\mathrm{rg(h)} \geq \mathrm{rg(f)} - \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{(g)}\ \ .$$

(3) Montrer que
$$\dim \mathrm{Ker}\ (g \circ f) \leq \dim \mathrm{Ker}\ (g) + \dim \mathrm{Ker}\ (f)\ \ .$$

Exercice 2. Pour $n \geq 1$, on note
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n} dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n} dx.$$

(1) Trouver la limite de I_n lorsque $n \to \infty$.

(2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $|I_n - J_n| \leq \frac{1}{2n(n+1)}$.

(3) Calculer J_n pour $n \geq 1$.
Indication. On pourra utiliser un changement de variables.

(4) En déduire un équivalent simple de I_n lorsque $n \to \infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

(1) Vérifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Précisez la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ et donnez une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Est-ce que la famille $(1, 1 - x + x^2, 1 + x + x^2)$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 2$?

(3) Existe-t-il des polynômes $P(X), Q(X), R(X), S(X)$ tels que

$$1 + xy + x^2y^2 = P(x)R(y) + Q(x)S(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$?

Exercice 2. Soit f une fonction continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, telle que $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(1) Montrer que, pour tout $y \in]0, 1]$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = y$. Dans la suite, on note $x = f^{-1}(y)$.

(2) Calculer f^{-1} lorsque f est la fonction $x \mapsto e^{-3x}$, $x \mapsto 1/(1 + x^2)$ et la fonction $x \mapsto 1/\ln(e + x)$.

On revient au cas général et on définit pour tout $n \geq 1$, x_n l'unique réel positif tel que $f(x_n) = 1/n$.

(3) Montrer que $x_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

(4) Montrer que dans chaque exemple de la question 2,

$$f\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) x_n\right) - \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{quand} \qquad n \to \infty\ .$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\ u$.

(b) $u^2 = 0$ et $\dim \mathrm{Ker}\ u = \dim \mathrm{Im}\ u = \dim E/2$.

(c) $u^2 = 0$ et il existe un endomorphisme v de E tel que $u \circ v + v \circ u = Id_E$.

Exercice 2. Soit $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Pour $n \geq 1$, soit $f_n : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{n}{x} \cdot \left(f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) \right).$$

On suppose que la fonction $x \mapsto x f''(x)$ est bornée.

(1) On fixe $x \geq 1$. Quelle est la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$?

(2) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, exprimer la quantité $f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) - \frac{x}{n} f'(x)$ sous la forme d'une intégrale. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f'(x)| = 0.$$

(3) On suppose que $f(x)/x$ converge lorsque $x \to +\infty$ vers une limite notée L. On fixe $n \geq 1$; montrer que $f_n(x) \to L$ lorsque $x \to \infty$. En déduire que $f'(x) \to L$ lorsque $x \to \infty$.

(4) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $g'(x)$ converge lorsque $x \to +\infty$ vers une limite notée L. Est-ce que $g(x)/x \to L$ lorsque $x \to \infty$?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. Un *chemin* de longueur n est par définition une suite $X_0, X_1, \ldots, X_n$ de points à coordonnées entières du plan tels que X_0 est l'origine, et la distance entre X_i et X_{i+1} vaut 1 pour tout $0 \leq i \leq n-1$.

Par exemple, $X_0 = (0,0), X_1 = (1,0), X_2 = (1,1), X_3 = (1,0), X_4 = (1,-1)$ est un chemin de longueur 4.

(1) Combien y a-t-il de chemins de longueur 1 ? De longueur 2 ? De longueur n ?

(2) On dit qu'un chemin $X_0, X_1, \ldots, X_n$ *ne revient pas en arrière* si $X_i \neq X_{i-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Combien y a-t-il de chemins de longueur n qui ne reviennent pas en arrière ?

(3) On dit qu'un chemin $X_0, X_1, \ldots, X_n$ est auto-évitant si $X_i \neq X_j$ dès que $i \neq j$. Soit p_n la probabilité qu'un chemin de longueur n choisi uniformément au hasard soit auto-évitant. Trouver la limite de p_n lorsque $n \to \infty$.

(4) Soit c_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n. Montrer que $c_{m+n} \leq c_m \cdot c_n$ pour tous entiers $m, n \geq 1$.

Exercice 2. Soit a un nombre réel strictement positif.

(1) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_0 = a$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1+u_n^2}.$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Soit b un nombre réel strictement positif. On considère maintenant la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que $v_0 = a, v_1 = b$ et pour tout $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = \frac{v_n^2}{1+v_n v_{n-1}}.$$

(2) On suppose dans cette question que v_n est croissante et que $v_n \to \infty$. Montrer que $v_{n+1}v_{n-1}/v_n \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$. En remarquant que

$$v_{n+1} + v_n^2 \left(\frac{v_{n+1}v_{n-1}}{v_n} - 1 \right) = 0,$$

aboutir à une contradiction.

(3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ n'est pas croissante (on pourra raisonner par l'absurde).

(4) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite qu'on déterminera.

(5) Soit w_n la suite définie par $w_n = \ln(v_n)/2^n$. Montrer que la série de terme général $w_{n+1} - w_n$ converge. En déduire que la suite w_n converge lorsque $n \to \infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) = \frac{x}{2015} + 1.$$

Soit a un nombre réel. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_0 = a$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2015} + 1.$$

(1) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

(2) Montrer que $f'(u_{n+1}) = f'(u_n)$ pour tout entier $n \geq 0$.

(3) Montrer que f est une fonction affine.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un nombre entier et $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. On considère des nombres réels strictement positifs $w_1, \ldots, w_n$, avec $w_1 = 1$. Pour tous $i, j \in E_n$ avec $i \neq j$, on tire une variable aléatoire de Bernoulli $X_{i,j}$ de paramètre $\frac{w_i}{w_i+w_j}$. Toutes ces variables sont supposées indépendantes. Si $X_{i,j} = 1$, on trace une flèche de i vers j, sinon, on trace une flèche de j vers i.

(1) Soit $m_n = \min_{1\leq i,j\leq n} \frac{w_i}{w_j}$. Montrer que pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$\frac{w_i}{w_i + w_j} \leq \frac{1}{1 + m_n} \quad .$$

(2) Montrer que pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$\frac{w_i}{w_i + w_j} \leq \frac{1}{2^{m_n}} \quad .$$

(3) Soit $A \subset E_n$ un sous-ensemble de E_n de cardinal r avec $1 \leq r \leq n-1$. De combien de manières différentes peut-on choisir un point de A et un point de son complémentaire A^c ?

(4) En déduire une majoration de la probabilité qu'aucun flèche ne sorte de A.

(5) En déduire une condition suffisante sur m_n pour que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) = 1 \quad ,$$

où C_n est l'événement suivant : « Pour toute partie $A \subset E_n$ de cardinal au moins 1 et au plus $n - 1$, il existe une flèche de A vers son complémentaire A^c ».

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit

$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt \ .$$

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{1}{n} \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{1/n} \, du.$$

(2) Donner la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ lorsque $n \to \infty$.

(3) Donner un équivalent de I_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On rappelle que A est inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.

(1) Soient $B, C \in M_n(\mathbb{R})$ tels que $AB = I_n$ et $CA = I_n$. Prouver que que $B = C$.

(2) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = I_n$. Le but de cette question est de montrer que A est inversible. Pour cela, on considère la fonction $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = MA$. Montrer que f est injective. En déduire que f est surjective, puis que $BA = I_n$.

(3) Soient $U, V \in M_n(\mathbb{R})$ tels que $U + V = UV$. Montrer que $UV = VU$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 2$ un nombre entier. Une suite de n individus se transmet une information binaire qui vaut 0 ou 1. Chaque individu transmet l'information qu'il a reçue avec une probabilité p et la modifie avec une probabilité $1-p$. On suppose que les individus se comportent de manière indépendante. On note p_n la probabilité que l'information émise par le premier individu soit celle reçue par le n-ième.

(1) Calculer p_n lorsque $p = 1$ et $p = 0$.

(2) Calculer p_2 dans le cas où $p \in [0,1]$ est quelconque.

(3) Supposons $p \in]0,1[$ et $n \geq 3$.
   - (a) Déterminer p_n en fonction de p_{n-1}.
   - (b) En déduire la valeur de p_n.

(4) On se propose ici de retrouver le résultat de la question précédente avec une autre méthode.
   - (a) Soit S_n la variable aléatoire égale au nombre de modifications de l'information entre le premier et le n-ième individu. Déterminer la loi de S_n.
   - (b) Calculer de deux manières différentes $\mathbb{E}\left[(-1)^{S_n}\right]$ et conclure.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que que $f(x)^2 + (1 + f'(x))^2 \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que f est bornée.

(2) Montrer que f est décroissante.

(3) Montrer que f admet des limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

(4) Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(5) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $g(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$. A-t-on forcément $g'(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $xf'(x) + f(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Soit $g(x) = x(f(x) - a)$. Montrer que g est de classe C^1.

(2) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que $f(x) \geq a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(4) Montrer que $f(x) \leq b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

(1) On pose $P(u) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + uy_i)^2$. Montrer que P est un polynôme du second degré. Quel est son discriminant ?

(2) Montrer que
$$\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + \cdots + y_n^2\right) \geq \left(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n\right)^2 .$$

(3) On définit, pour tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\|M\| = \sup_{x \neq 0} \frac{N(Mx)}{N(x)} \quad .$$

Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\max_{1 \leq i,j \leq n} |M_{i,j}| \leq \|M\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2} \quad .$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$ espace-vectoriel. Soient p et q deux endomorphismes de E. On suppose que $p \circ p = p, q \circ q = q$ et que $p \circ q = 0$, et on considère l'endomorphisme $r = p + q - q \circ p$.

(1) Montrer que $E = \text{Im }(p) \oplus \text{Ker }(p)$.

(2) Montrer que $r \circ r = r$.

(3) Montrer que $\text{Ker }(r) = \text{Ker }(p) \cap \text{Ker }(q)$.

(4) Montrer que $\text{Im }(r) = \text{Im }(p) \oplus \text{Im }(q)$.

Exercice 2. Une colonie de vampires a élu domicile dans un château des Carpates, et le comte Drakul souhaite estimer leur nombre. Pour cela, une nuit de pleine lune, le comte en capture 10, leur mord les oreilles, puis les relâche. La nuit suivante, il en capture 10 au hasard. Trois ont une morsure aux oreilles. On note n le nombre de vampires, A l'événement « Il y a 3 vampires mordus parmi les 10 capturés », et on note $f(n)$ la probabilité de l'événement A. On pose finalement

$$u_n = \frac{f(n)}{f(n+1)}$$

(1) Soient $a, b \geq 0$ deux entiers tels que $a \leq b$. Simplifier l'expression

$$\frac{\binom{b+1}{a}}{\binom{b}{a}}.$$

(2) De combien de manières différentes le comte peut-il capturer 10 vampires parmi les n vampires ? Si 10 vampires parmi les n vampires ont des morsures aux oreilles, de combien de manières différentes le comte peut-il en capturer 10 pour qu'exactement 3 vampires aient des morsures ?

(3) Montrer que

$$u_n = \frac{n^2 - 15n - 16}{n^2 - 18n + 81}.$$

(4) Le maximum de vraisemblance m est la valeur de l'entier n pour laquelle la fonction f atteint un maximum. Déterminer m.